

Wyznaczanie długości światła laserowego na podstawie analizy obrazu interferencyjnego powstałego po przejściu światła przez siatkę dyfrakcyjną

Jan Kowalski

Laboratorium Eksperymentu Fizycznego, Wydział Fizyki UAM, Fizyka medyczna, rok 1, grupa 1

Streszczenie

W doświadczeniu zbadano zjawiska dyfrakcji i interferencji po przejściu wiązki światła lasera czerwonego przez siatkę dyfrakcyjną o stałej siatki d równej $10\mu m$. W eksperymencie zarejestrowano serię obrazów interferencyjnych dla różnych odległości siatki dyfrakcyjnej od ekranu (D). W każdym z otrzymanych obrazów zmierzono odległość pomiędzy pierwszorzędowymi maksimami ($l_{k=1}$) i stwierdzono, że wraz ze wzrostem D liniowo rośnie wartość $l_{k=1}$. Szczegółowa analiza eksperymentalnej zależności $l_{k=1}(D)$ przeprowadzona metodą regresji liniowej klasycznej umożliwiła wyznaczenie wartości średniej długości światła emitowanego przez laser na równą $\bar{\lambda} = (651,2 \pm 3,2)nm$, która zgodnie z oczekiwaniami odpowiada barwie czerwonej. Wartość $\bar{\lambda}$ wyznaczona w eksperymencie w granicach niepewności pomiarowych standardowych jest zgodna z wartością nominalną długości światła $\lambda^T = (650 \pm 40)nm$ podaną przez producenta lasera.

1. Wprowadzenie

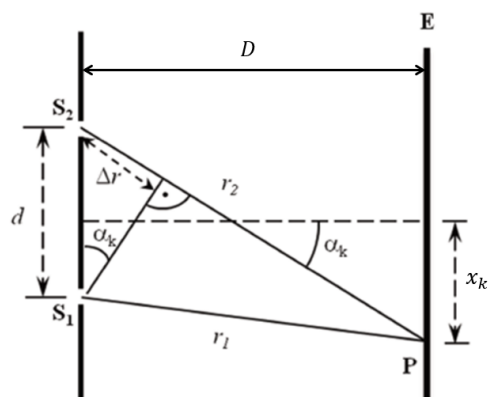
Światło jest falą elektromagnetyczną, czyli zmiennym polem elektromagnetycznym zawierającym wzajemnie indukujące się zmienne pole elektryczne i zmienne pole magnetyczne. W zjawiskach optycznych decydującą rolę odgrywa pole elektryczne, którego natężenie E w funkcji czasu t dla fali świetlnej rozchodzącej się w kierunku osi x można zapisać w postaci [1]

$$E = E_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] + \varphi \quad (1)$$

gdzie E_0 oznacza amplitudę natężenia pola elektrycznego, a symbole λ oraz T reprezentują odpowiednio **długość** i **okres** fali. Argument funkcji sinus jest **fazą** rozważanej fali, natomiast **fazę początkową** tej fali oznaczono symbolem φ . Falowa natura światła przejawia się w zjawiskach dyfrakcji i interferencji światła. **Dyfrakcja** (ugięcie fali) polega na zmianie kierunku rozchodzenia się fali, która zachodzi przy przejściu fali przez szczelinę lub w pobliżu krawędzi obiektu. Można to wytłumaczyć tym, że zgodnie z **zasadą Huygensa** każdy punkt, do którego dociera fala, staje się nowym źródłem elementarnej fali kulistej. W szczególności zjawisko dyfrakcji fali na dwóch szczelinach wykorzystuje się do wytworzenia fal monochromatycznych i spójnych (o stałej różnicy faz). Dla takich fal można zaobserwować zjawisko **interferencji**

polegające na nakładaniu się tych fal, w wyniku czego powstaje fala wypadkowa, której amplituda jest uzależniona od różnicy faz fal składowych [2]. W wyniku nakładania się fal wtórnych uzyskujemy na ekranie rozkład amplitud zwany obrazem interferencyjnym.

Zjawisko interferencji można przedstawić na podstawie doświadczenia Younga, którego schemat ilustruje rysunek 1. Dwie szczeliny: S_1 oraz S_2 stanowią źródła fal świetlnych o stałej różnicy faz (spójnych) i jednakowej długości. Na ekranie E , ustawionym za tymi szczelinami, powstają prążki jasne i ciemne. Prążki jasne powstają w miejscach, w których fale spotykają się w zgodnej fazie, natomiast ciemne w punktach odpowiadających przeciwnym fazom interferujących fal. Jeżeli oznaczymy przez r_1 oraz r_2 odpowiednio drogę pierwszej i drugiej fali pomiędzy odpowiednimi szczelinami i ekranem, to różnicę dróg optycznych tych fal można opisać wielkością $\Delta r = r_2 - r_1$ (rys. 1).



Rys. 1. Dyfrakcja fali na szczelinach S_1 i S_2 prowadzi do powstania fal, które nakładają się na siebie. W wyniku tego na ekranie E obserwuje się obraz interferencyjny złożony z prążków jasnych i ciemnych. Prążek jasny powstanie w punkcie P , gdy różnica dróg optycznych tych fal $\Delta r = r_2 - r_1$ będzie równa całkowitej wielokrotności długości fali $k\lambda$, natomiast dla prążków ciemnych Δr musi być nieparzystą wielokrotnością połowy długości fali

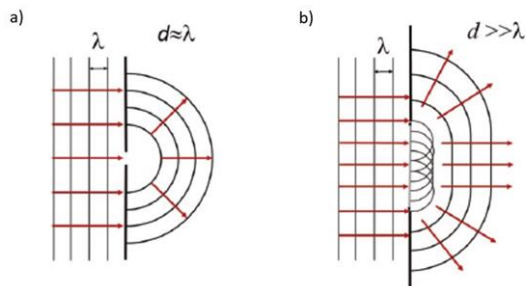
Jasny prążek interferencyjny pojawi się na ekranie E wówczas, gdy zachodzi zgodność fazowa interferujących fal - wtedy różnica faz jest równa całkowitej wielokrotności 2π . Przypadek ten zachodzi, gdy różnica dróg optycznych tych fal jest równa całkowitej wielokrotności długości fali, czyli gdy $\Delta r = k\lambda$ ($k \in N$). Na podstawie rysunku 1 wartość Δr można wyrazić także za pomocą wzoru:

$$\Delta r = d \sin \alpha_k \quad (2)$$

gdzie d oznacza odległość między środkami szczelin S_1 i S_2 natomiast α_k jest kątem, pod którym obserwowany jest jasny prążek interferencyjny rzędu k . Na podstawie wyżej wymienionych zależności otrzymujemy następujący warunek występowania prążków jasnych:

$$d \sin \alpha_k = k\lambda. \quad (3)$$

W zależności od szerokości szczeliny d zjawisko dyfrakcji jest mniej lub bardziej widoczne (rys.2). Jeżeli szerokość szczeliny d jest porównywalna z długością fali λ (rys. 2a), czyli spełniony jest warunek $d \approx \lambda$, to można przyjąć, że otwór jest źródłem pojedynczej fali kulistej i zjawisko dyfrakcji jest wyraźnie obserwowane. Gdy spełniony jest warunek $d \gg \lambda$ (rys. 2b), to wiele fal kulistych czoła fali, dochodząc do przeszkody, tworzy falę płaską, która przechodzi bez ugięcia, a tylko na krawędziach szczeliny zachodzi zjawisko dyfrakcji fali.



Rys. 2. Zjawisko dyfrakcji fali na pojedynczej szczelinie w warunkach gdy: a) szerokość szczeliny d jest porównywalna z

długością λ fali ($d \approx \lambda$), b) szerokość szczeliny jest dużo większa od długości λ fali ($d \gg \lambda$)

Jeżeli fala świetlna pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną, która zawiera szereg wzajemnie równoległych i leżących w równych odstępach szczelin, to ugięte na szczelinach fale, w wyniku **zjawiska interferencji**, nakładają się na siebie, dając na ekranie obraz interferencyjny. Najczęściej siatkę dyfrakcyjną stanowi szereg rys naniesionych na płasko-równoległą płytkę szklaną. Przestrzenie między rysami spełniają funkcję szczelin, a odległość pomiędzy środkami sąsiednich szczelin nazywamy **stałą siatki dyfrakcyjnej d** .

W realizowanym doświadczeniu obraz interferencyjny na ekranie otrzymuje się po przejściu światła laserowego przez siatkę dyfrakcyjną. W oparciu o uzyskany obraz i przy założeniu, że odległość ekranu od układu szczelin D jest duża (rys. 1.) można estymować wartość sinusa kąta ugięcia α_k z wykorzystaniem zależności:

$$\sin \alpha_k \approx \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{x_k}{D}. \quad (4)$$

Wprowadzając (4) do (3) można po prostych przekształceniach obliczyć długość fali λ światła padającego na siatkę dyfrakcyjną na podstawie określenia położenia x_k k -tego maksimum obrazu interferencyjnego (względem prążka zerowego) przy znanych wartościach d i D , zgodnie z poniższym wzorem:

$$\lambda = \frac{dx_k}{kD} \quad (5)$$

lub stałą siatki dyfrakcyjnej d przy znanej długości λ fali padającej zgodnie z formułą:

$$d = \frac{k\lambda D}{x_k}. \quad (6)$$

Stałą siatki dyfrakcyjnej d (przy znanej długości fali λ światła laserowego i odległości D ekranu od siatki) lub długość fali światła λ laserowego (przy znanej wartości stałej siatki dyfrakcyjnej d i odległości D ekranu od siatki) dla danej wartości k można wyznaczyć w oparciu o badanie zmiennych zależnych $x_k(D)$ i analizę otrzymanych wyników metodą regresji liniowej. Dla przypadku gdy analizuje się zmianę położenia x_k dla pierwszorzędowego

maksimum ($k = 1$) w funkcji zmiany odległości D , wyznaczenie d lub λ umożliwia następujące przypisanie zmiennych:

$$\underbrace{x_{k=1}}_y = \frac{\lambda}{a} \underbrace{D}_x \quad (7)$$

gdzie: a – współczynnik kierunkowy prostej regresji.

W eksperymencie można również wykonywać pomiary wielkości $l_{k=1}$ definiującej odległość pomiędzy pierwszorzędowymi maksimum obrazu interferencyjnego w funkcji odległości D siatki dyfrakcyjnej od ekranu. Zakładając, że $l_{k=1} = 2x_{k=1}$ i wprowadzając tą relację do wzoru (7) eksperymentalną zależność $l_{k=1}(D)$ można analizować metodą regresji liniowej wykorzystując poniższe przypisanie badanych zmiennych zależnych:

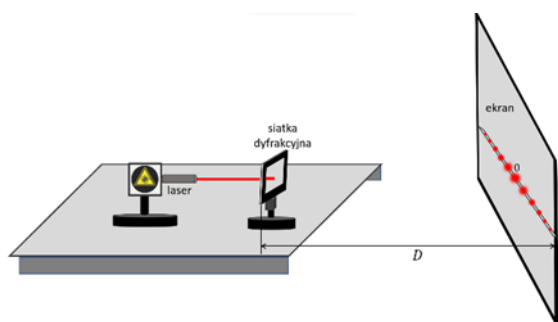
$$\underbrace{l_{k=1}}_y = \frac{2\lambda}{a} \underbrace{D}_x \quad (8)$$

2. Układ pomiarowy i przebieg doświadczenia

2.1. Układ pomiarowy

Na rysunku 3 przedstawiono poglądowy schemat stanowiska pomiarowego, którego główne elementy to:

- jednowiązkowy laser, umocowany na stojaku z uchwytem, emitujący światło czerwone o nominalnej wartości długości fali światła równej $\lambda^T = 650 \text{ nm}$ określonej w granicy niepewności całkowitej standardowej $u(\lambda^T) = 40 \text{ nm}$;
- siatka dyfrakcyjna ($d = 10 \mu\text{m}$),
- ekran (tablica magnetyczna),
- narzędzia do pomiaru długości (taśma miernicza z magnesem, o niepewności działki równej 1 mm).



Rys. 3. Schemat stanowiska pomiarowego

2.2. Przebieg doświadczenia i metodyka analizy danych

1. Umieścić laser w uchwycie znajdującym się przed siatką dyfrakcyjną na takiej wysokości, aby wiązka lasera przechodziła prostopadle do płaszczyzny siatki dyfrakcyjnej i przez jej centralną część. Zmierzyć odległość uchwytu z laserem od uchwytu z siatką dyfrakcyjną (LS). Zapisać wartość LS oraz wartość stałej siatki dyfrakcyjnej d .
2. Przygotować tabelę do zapisu wyników pomiarów zależności $l_{k=1}(D)$, a ponad nią zapisać niepewności pomiarowe narzędzi pomiarowych, którymi mierzone będą wielkości D i $l_{k=1}$.
3. Ustawić siatkę w położeniu równoległym do ekranu, a następnie zmierzyć odległość D siatki dyfrakcyjnej od ekranu. Zapisać w tabeli odczytaną wartość D .
4. Uruchomić laser poprzez założenie klamry na włączniku lasera.
5. Wykonać zdjęcie otrzymanego na ekranie obrazu interferencyjnego (dla ustalonej wartości D).
6. Oznaczyć pisakiem na tablicy położenie zarejestrowanego maksimum centralnego i odpowiednie położenia maksimum pierwszorzędowych.
7. Wyłączyć laser.
8. Zmierzyć odległość $l_{k=1}$ i zapisać otrzymany wynik w tabeli z danymi pomiarowymi.
9. Zwiększyć wartość D oddalając od ekranu układ stojaków z laserem i siatką dyfrakcyjną (przy zachowaniu odległości LS).
10. Uruchomić laser poprzez założenie klamry na włączniku lasera.
11. Oddalony od ekranu układ laser-siatka dyfrakcyjna, (przy ustalonej w punkcie 1 odległości LS) powinien znajdować się w takiej pozycji, aby maksimum centralne zaznaczone pisakiem na tablicy dla

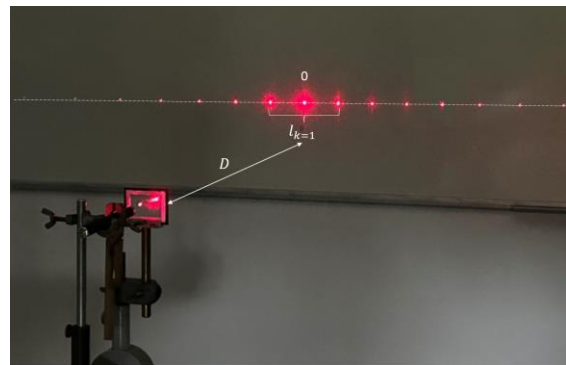
pierwszego otrzymanego obrazu interferencyjnego pokryło się z położeniem maksimum centralnego nowo zarejestrowanego obrazu uzyskanego na ekranie po zmianie odległości D .

12. Czynności opisane w punktach 5-11 powtórzyć przynajmniej dla sześciu różnych wartości D .
13. Wykonać wykres zależności $l_{k=1}(D)$ z uwzględnieniem niepewności całkowitych standardowych $u(D)$ i $u(l_{k=1})$.
14. W celu wyznaczenia wartości średniej długości fali $\bar{\lambda}$ światła emitowanego przez laser otrzymaną zależność eksperymentalną $l_{k=1}(D)$ należy przeanalizować metodą regresji liniowej wykorzystując przedstawione w równaniu (8) przypisanie zmiennych x i y odpowiednim wartościom wielkości D i $l_{k=1}$. Estymowana wartość współczynnika a prostej regresji, która najlepiej przybliży eksperymentalną zależność $l_{k=1}(D)$ posłuży (przy znajomości stałej siatki dyfrakcyjnej $d = 10\mu\text{m}$) do wyznaczenia szukanej w doświadczeniu wartości $\bar{\lambda}$ i jej niepewności standardowej $u(\lambda)$ (po uwzględnieniu niepewności współczynnika kierunkowego a prostej regresji) oraz względnej procentowej $u_r(\lambda)$.
15. W podsumowaniu otrzymaną wartość $\bar{\lambda}$ i jej niepewność standardową $u(\lambda)$ zestawić zgodnie z regułami zaokrąglania i właściwą jednostką i porównać zgodność z nominalną długością fali światła lasera stosowanego w doświadczeniu.

3. 3. Prezentacja i dyskusja wyników

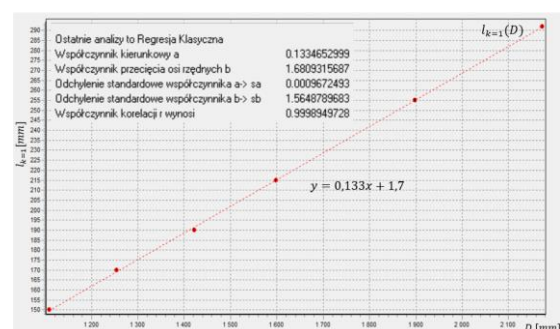
Po przejściu wiązki lasera przez siatkę dyfrakcyjną zarejestrowano na ekranie obraz interferencyjny, co stanowi eksperymentalne potwierdzenie istnienia zjawisk dyfrakcji i interferencji światła. W eksperymencie zarejestrowano serię obrazów interferencyjnych dla różnych odległości siatki dyfrakcyjnej od ekranu (D) i stwierdzono, na podstawie analizy odległości pomiędzy pierwszorzędowymi maksimum ($l_{k=1}$) poszczególnych obrazów, że wraz ze wzrostem D liniowo rośnie odległość $l_{k=1}$. Na rysunku 4 przedstawiono przykładowe

zdjęcie otrzymanego w eksperymencie obrazu interferencyjnego dla $D = 1109 \text{ mm}$ wraz z oznaczoną odległością $l_{k=1}$ pomiędzy pierwszorzędowymi maksimum, która dla tego przypadku była równa 150 mm . Na zdjęciu tym można zauważyć, że największe natężenie ma maksimum centralne, a ze wzrostem k obserwuje się coraz mniejszą intensywność rejestrowanych maksimum. Dla wszystkich badanych odległości D obserwowano podobną charakterystykę rozkładu intensywności maksimum w otrzymanych obrazach interferencyjnych.



Rys. 4. Obraz interferencyjny otrzymany w eksperymencie po przejściu światła lasera o barwie czerwonej przez siatkę dyfrakcyjną ($D = 1109 \text{ mm}$, $l_{k=1} = 150 \text{ mm}$)

Wykres zależności $l_{k=1}(D)$ wraz z niepewnościami całkowitymi standardowymi $u(D)$ i $u(l_{k=1})$ i wykreśloną prostą regresji o równaniu $y = 0,133x + 1,7$ stanowiącą najlepsze przybliżenie wyników eksperymentalnych przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5. Wykres zależności $l_{k=1}(D)$ wraz z niepewnościami całkowitymi standardowymi $u(D)$ i $u(l_{k=1})$ i prostą regresji $y = 0,133x + 1,7$ stanowiącą najlepsze przybliżenie danych eksperymentalnych

Analiza zależności $l_{k=1}(D)$ została przeprowadzona metodą regresji liniowej, ponieważ wartość współczynnika korelacji r okazała się bardzo bliska wartości 1, a tym

samym wykazała istnienie bardzo silnej liniowej korelacji badanych wielkości D i $l_{k=1}$.

W tabeli 1 zamieszczono wyniki analizy danych przeprowadzone metodą regresji liniowej klasycznej oraz zestawienie końcowe wyników prezentujące obliczoną wartość średnią długości fali $\bar{\lambda}$ światła emitowanego przez laser stosowany w doświadczeniu wraz z niepewnością całkowitą standardową $u(\lambda)$ i względną procentową $u_r(\lambda)$. W tabeli 1 zawarto także rezultat testowania zgodności wartości średniej $\bar{\lambda}$ z nominalną długością fali światła λ^T podaną przez producenta lasera oraz wartości współczynnika b prostej regresji z wartością teoretyczną $b^T = 0\text{mm}$ wynikającą z założonego modelu fizycznego.

Tab.1. Wyniki analizy danych $l_{k=1}(D)$ przeprowadzone metodą regresji liniowej klasycznej oraz zestawienie końcowe wyników wraz z rezultatami badania zgodności wyników z wartościami oczekiwanymi

Wyniki analizy danych $l_{k=1}(D)$ metodą regresji liniowej klasycznej			
$l_{k=1} = \frac{2\lambda}{a} D$			
r	0,99989493		
a	0,133	b [mm]	1,7
s_a	0,001	s_b [mm]	1,6
Równanie prostej regresji	$y = 0,133x + 1,7$		
n	6		
Pomiary pośrednie			
\bar{Z} [jed]	\bar{z}	$u(z)$	$u_r(z)$ [%]
$\bar{\lambda}$ [nm]	667	5	0,7
Badanie zgodności wyników z wartością oczekiwaną			
$ \bar{\lambda} - \lambda^T \leq u(\lambda) + u(\lambda^T)$ $\lambda^T = 650\text{ nm}$ $u(\lambda^T) = 40\text{ nm}$			Wynik: zgodność
$ b - b^T \leq U(b)$ $U(b) = 2u_A(b)$ $b^T = 0\text{ nm}$			Wynik: zgodność

Eksperymentalnie otrzymana wartość średnia długości światła $\bar{\lambda}$ jest zgodna z wartością oczekiwaną λ^T w granicach niepewności pomiarowych standardowych, co przy małej wartości niepewności względnej $u_r(\lambda) = 0,7\%$ wskazuje na pomyślny przebieg eksperymentu oraz brak konieczności planowania pomiarów dokładniejszych. Słuszność zastosowanego modelu fizycznego do opisu danych eksperymentalnych potwierdza także zgodność wartości b i $b^T = 0\text{mm}$, w granicach niepewności rozszerzonej $U(b) = 2u_A(b)$.

Wszystkie dane pomiarowe i szczegółowa analiza wyników została przedstawiona w aneksie raportu.

4. Wnioski

1. W eksperymencie potwierdzono istnienie zjawisk dyfrakcji i interferencji światła, czego dowodem było zarejestrowanie po przejściu wiązki lasera przez siatkę dyfrakcyjną obrazu interferencyjnego.
2. W eksperymencie zarejestrowano serię obrazów interferencyjnych dla różnych odległości siatki dyfrakcyjnej od ekranu (D) i stwierdzono, że wraz ze wzrostem D liniowo rośnie odległość pomiędzy pierwszorzędowymi maksimumami ($l_{k=1}$), oraz że dla każdego z obrazów maksimum centralne charakteryzuje największa intensywność, a kolejne maksima ze wzrostem rzędu k cechuje coraz mniejsza intensywność.
3. Analiza zależności $l_{k=1}(D)$ przeprowadzona metodą regresji liniowej klasycznej umożliwiła wyznaczenie wartości średniej długości światła emitowanego przez laser, która zgodnie z oczekiwaniami odpowiada barwie czerwonej. Otrzymana wartość $\bar{\lambda} = (667 \pm 5)\text{ nm}$ a w granicach niepewności pomiarowych standardowych jest zgodna z wartością nominalną długości światła $\lambda^T = 650\text{ nm}$ ($u(\lambda^T) = 40\text{ nm}$) podaną przez producenta lasera.
4. Wartość współczynnika b prostej regresji w granicach niepewności standardowej rozszerzonej jest zgodna z wartością oczekiwaną $b^T = 0\text{mm}$, co wraz z wnioskiem 3 potwierdza słuszność

założonego modelu fizycznego (8) w analizie zależności eksperymentalnej $l_{k=1}(D)$.

5. Wartość niepewności względnej procentowej $u_r(\lambda)$ jest dużo mniejsza niż 5%, co przy zgodności $\bar{\lambda}$ z wartością λ^T oznacza, że rezultat eksperymentu jest zadowalający i nie wymaga się planowania bardziej dokładnych pomiarów.
6. Przeprowadzone doświadczenie pogłębiło wiedzę z zakresu optyki dotyczącej zjawisk dyfrakcji i interferencji światła.

Literatura

- [1] Kotłowska M., Dobies M., Makrocka-Rydzyk M., Paprzycka M., Woźniak-Braszak A., *Pracownia Podstaw Eksperyment Fizycznego*, Wydawnictwo Naukowe UAM, 2019

Data realizacji doświadczenia: 17.09.2023

Prowadzący doświadczenie: dr Maria Dobies

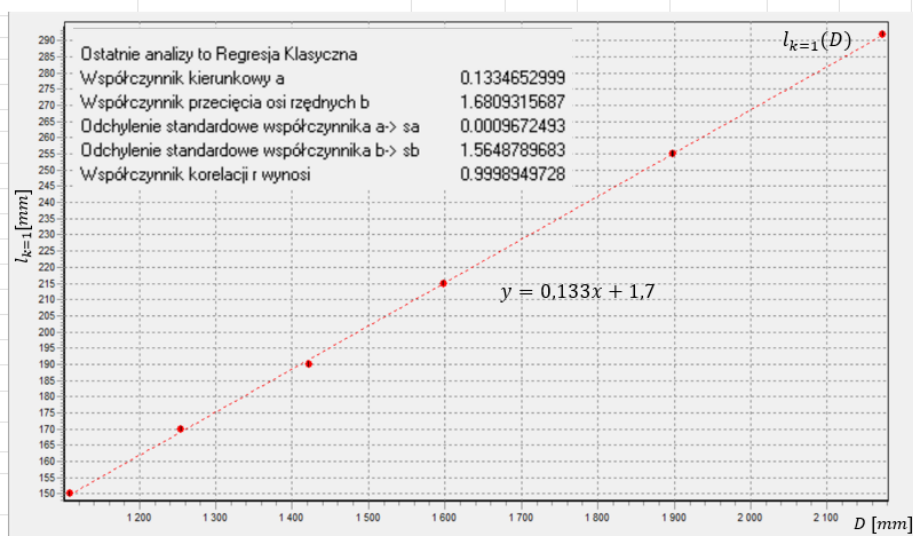
Aneks

Wyznaczenie długości fali światła z wykorzystaniem analizy zależności $l_{k=1}(D)$ - metoda regresji liniowej

$$\underbrace{l_{k=1}}_y = \frac{2\lambda}{\underbrace{d}_a} \underbrace{D}_x$$

	$d[\mu\text{m}]$	10		
	$d[\text{mm}]$	0,01		
	$\Delta_d D [\text{mm}]$	1	$\Delta_d l_{k=1} [\text{mm}]$	1
	$\Delta_D D [\text{mm}]$	1	$\Delta_d l_{k=1} [\text{mm}]$	1
	$u(D) [\text{mm}]$	0,816496581	$u(l_{k=1}) [\text{mm}]$	0,816496581

Lp.	$D [\text{mm}]$	$l_{k=1} [\text{mm}]$
1	1109	150
2	1255	170
3	1422	190
4	1598	215
5	1898	255
6	2173	292



Wyniki analizy zależności $l_{k=1}(D)$ metodą regresji liniowej klasycznej:	
r	0,999894973
a	0,1334653
$u_A(a) = s_a$	0,000967249
$b [\text{mm}]$	1,680931569
$u_A(b) = s_b [\text{mm}]$	1,564878968
$a = (0,133 \pm 0,001)$	
$b = (1,7 \pm 1,6)\text{mm}$	
Równanie prostej regresji:	
$y = 0,133x + 1,7$	

Obliczanie wartości średniej $\bar{\lambda}$ długości fali światła lasera czerwonego i jej niepewności całkowitej $u(\lambda)$ oraz względnej procentowej $u_r(\lambda)$	
$\bar{\lambda} = \frac{a \cdot d}{2}$	$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial a} u_A(a)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2} u_A(a)\right)^2}$
$\bar{\lambda} [mm]$	0,000667326
$u(\lambda) [mm]$	4,83625E-06
$\bar{\lambda} [nm]$	667,3264995
$u(\lambda) [nm]$	4,8362465
$u_r(\lambda) [\%]$	0,724719684
Zestawienie końcowe wyników:	$\bar{\lambda} = 667nm$ $u(\lambda) = 5nm$ $u_r(\lambda) = 0,7\%$

Badanie zgodności $\bar{\lambda}$ z wartością nominalną długości światła lasera czerwonego daną: $\lambda^T = (650 \pm 40)nm$ na podstawie kryterium:

$ \bar{\lambda} - \lambda^T \leq u(\lambda) + u(\lambda^T)$	
$\lambda^T [nm]$	650
$u(\lambda^T) [nm]$	40
$\bar{\lambda} - \lambda^T [nm]$	17,3264995
$u(\lambda) + u(\lambda^T) [nm]$	44,8362465
Wynik:	zgodność

Badanie zgodności wartości współczynnika b prostej regresji z wartością teoretyczną $b^T = 0 mm$ na podstawie kryterium:

$ b - b^T \leq U(b)$	
$b - b^T [mm]$	1,680931569
$U(b) = 2u_A(b) [mm]$	3,129757937
Wynik:	zgodność